Über den Widerstand einer in einer Flüssigkeit rotierenden Scheibe

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde

Genehmigt von der Philosophischen Fakultät
der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin

Von

CURT SCHMIEDEN

aus Stargard i. Pomm.

Tag der Promotion: 5. März 1929

Referenten: Professor v. MISES
Professor BIEBERBACH

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Sonderabdruck aus:
Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik
Band 8, 1928, Seite 460 bis 479.

Über den Widerstand einer in einer Flüssigkeit rotierenden Scheibe.[1])

Von **CURT SCHMIEDEN** in Danzig-Langfuhr.

Einleitung. Zu den wenigen Fällen, in denen die Bewegungsgleichungen der zähen Flüssigkeiten integriert werden können, gehört die laminare Strömung, die durch eine rotierende Scheibe mit unendlich großem Radius in einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit erzeugt wird. Die Bewegungsgleichungen lassen sich in diesem Falle auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen reduzieren, die durch numerische Integration gelöst werden können. Hr. v. Kármán rechnet das Problem grenzschichtmäßig durch und erhält einen Näherungswert für den Reibungswiderstand[2]). Auch für den Fall der Turbulenz gibt er den Widerstand an, indem er die Blasiussche Formel für den Strömungswiderstand in glatten Rohren auf den vorliegenden Fall überträgt. Die Uebereinstimmung mit den Versuchen ist recht gut.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Berechnung des Widerstandes, den eine endliche Kreisscheibe erfährt, wenn sie in einem mit zäher Flüssigkeit gefüllten und allseitig geschlossenen Zylinder mit gegebener Winkelgeschwindigkeit ω rotiert. Dabei beschränke ich mich von vornherein auf so kleine Geschwindigkeiten, daß die quadratischen Glieder der Navier-Stockesschen Gleichungen vernachlässigt werden können. Nennen wir die ganze Höhe des Zylinders $2h$, seinen Radius r_0, den Scheibenradius r_1 und die Größe $r_0 - r_1$, also den Abstand des Endpunktes eines Scheibenradius von der Gefäßwand, die Spaltbreite δ, so läuft die Aufgabe darauf hinaus, die Abhängigkeit des Widerstandes der Scheibe einmal vom Seitenverhältnis des Gefäßes bei konstanter Spaltbreite, das andere Mal von der Spaltbreite bei konstantem Seitenverhältnis für praktisch vorkommende Zahlenwerte zu bestimmen.

Unter der Annahme kleiner Geschwindigkeiten verläuft die Bewegung naturgemäß laminar, jedes Flüssigkeitsteilchen beschreibt einen Kreis um die Zylinderachse. Mittels

[1]) Diese Arbeit wurde von der philosophischen Fakultät der Universität Berlin als Doktor-Dissertation angenommen. Referenten: Prof. v. Mises und Prof. Bieberbach.

[2]) v. Kármán, Ueber laminare und turbulente Reibung, diese Zeitschr. Bd. 1 (1921).

einer zweckmäßigen Substitution gelingt es, die Differentialgleichung für die Geschwindigkeit auf die Potentialgleichung $\Delta \varphi = 0$ zurückzuführen. Von dieser Differentialgleichung gehe ich in der üblichen Weise mit Hilfe der Greenschen Formel zu einer Integralgleichung für die Randwerte der gesuchten Funktion über. Die Integrale dieser Formel, die ursprünglich über die gesamte Begrenzungsfläche des Bereiches erstreckt sind, lassen sich infolge der Rotationssymmetrie in Randintegrale über einen Meridianschnitt umformen. Die so entstehende Integralgleichung ersetze ich näherungsweise durch ein System endlich vieler linearer Gleichungen, durch dessen Auflösung ich die gesuchten Randwerte für eine Reihe diskreter Punkte erhalte; diese Auflösung führe ich für eine Anzahl von Werten des Seitenverhältnisses und der Spaltbreite durch. Dabei zeigt sich, daß der Widerstand bis zu sehr kleinen Werten des Seitenverhältnisses von diesem praktisch unabhängig ist, während er von einer kleinen Aenderung der Spaltbreite schon sehr stark beeinflußt wird.

1. Die Differentialgleichung. Die Navier-Stokesschen Grundgleichungen der Bewegung einer zähen, inkompressiblen Flüssigkeit sind gegeben durch

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + (\mathfrak{v}\,\mathrm{grad})\,\mathfrak{v} = \mathfrak{K} - \frac{1}{\varrho}\,\mathrm{grad}\,p + \nu\,\Delta\,\mathfrak{v}; \qquad \mathrm{div}\,\mathfrak{v} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Hierin bedeutet $\mathfrak{v}$ die vektorielle Geschwindigkeit, $\mathfrak{K}$ die äußere Kraft, p den Druck, ϱ die Dichte und ν die kinematische Zähigkeit.

In unserem speziellen Problem ist die Bewegung stationär, also $\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} = 0$, ferner verschwindet die äußere Kraft. Weiterhin wollen wir die Bewegung nur bei so kleinen Geschwindigkeiten untersuchen, daß Glieder zweiter Ordnung in den Geschwindigkeiten zu vernachlässigen sind. Damit erhalten wir als Bewegungsgleichungen

$$\nu\,\Delta u = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad \nu\,\Delta v = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}, \qquad \nu\,\Delta w = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2).$$

Für dieses System suchen wir eine Lösung zu gewinnen, für die $p =$ konst. überall erfüllt ist. Dazu transformieren wir zunächst auf Zylinderkoordinaten: die Z-Achse sei die Rotationsachse, w die Geschwindigkeit in dieser Richtung, R die Geschwindigkeit in Richtung des Radiusvektors und V die zu beiden senkrechte Komponente. Infolge der Rotationssymmetrie sind dabei alle drei Geschwindigkeitskomponenten unabhängig vom Winkel φ. Wir können nun leicht zeigen, daß unter den gemachten Voraussetzungen nur V von Null verschieden ist. Die Komponente w genügt der Differentialgleichung

$$\Delta w = 0$$

und muß außerdem am ganzen Rande verschwinden, also nach bekannten Sätzen der Potentialtheorie identisch Null sein. Für die festen Wände und die rotierende Platte ist es ohne weiteres wegen der Bedingung des Haftens klar, daß w dort verschwinden muß. Im Spalt folgt es aus Symmetriebedingungen. Die Kontinuitätsgleichung lautet, da V unabhängig von φ ist.

$$\frac{\partial (r R)}{\partial r} + \frac{\partial (r w)}{\partial z} = 0\,.$$

Führen wir eine Stromfunktion ein, die diese Gleichung identisch befriedigt, so wird

$$r R = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \qquad r w = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Da w überall verschwindet, kann ψ und damit auch $r R$ nur eine Funktion von z sein. R verschwindet aber auf den seitlichen Gefäßwänden und somit auch im ganzen Bereich.

Um die Differentialgleichung für V aufzustellen, haben wir die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \Delta u &\equiv \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \\ \Delta v &\equiv \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

und die Transformationsformeln

$$V = -u\sin\varphi + v\cos\varphi \quad . \quad . \quad . \quad (3\,a), \qquad 0 = u\cos\varphi + v\sin\varphi \quad . \quad . \quad . \quad (3\,b).$$

Multiplizieren wir die zweite Gl. (3) mit $\cos\varphi$ und subtrahieren die mit $\sin\varphi$ multiplizierte erste von ihr, so folgt

$$\frac{\partial v^2}{\partial r^2}\cos\varphi - \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sin\varphi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi\right) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\cos\varphi - \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\sin\varphi\right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\cos\varphi - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\sin\varphi = 0\,.$$

Nun ist aber $\frac{\partial V}{\partial\varphi} = 0$ also

$$\frac{\partial v}{\partial\varphi}\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial\varphi}\sin\varphi - u\cos\varphi - v\sin\varphi = \frac{\partial v}{\partial\varphi}\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial\varphi}\sin\varphi = 0$$

wegen Gl. (3b). Nochmalige Differentiation liefert

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\cos\varphi - \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\sin\varphi - \frac{\partial v}{\partial\varphi}\sin\varphi - \frac{\partial u}{\partial\varphi}\cos\varphi = 0\,.$$

Die beiden letzten Terme sind aber gleichbedeutend mit

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}(u\cos\varphi + v\sin\varphi) + u\sin\varphi - v\cos\varphi = -V$$

wie aus (3a) und (3b) folgt. Es ist also

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\cos\varphi - \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\sin\varphi = -V\,,$$

so daß wir für V die Differentialgleichung erhalten

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

2. Die Lösung für verschwindende Spaltbreite. Setzt man die Spaltbreite Null, so läßt sich leicht eine Lösung der Gl. (4) aufstellen, die allen Grenzbedingungen genügt[1]). Machen wir den Ansatz $V = R(r)\cdot Z(z)$, so zerfällt die Gl. (4) in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen, nämlich

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{1}{r^2}\right)R = 0\,, \qquad \frac{d^2Z}{dz^2} - k^2 Z = 0$$

mit den Lösungen

$$R = b\,J_1(kr)\,, \qquad Z = b'\,\mathfrak{Sin}\,k(z + h)\,;$$

damit V auf den seitlichen Begrenzungen verschwindet, muß sein

$$kr_0 = \varrho_n\,, \qquad k = \varrho_n/r_0\,,$$

wobei r_0 den Zylinderradius bedeutet und ϱ_n eine Wurzel der Gleichung $J_1(\varrho) = 0$ ist. Wir können die Lösung somit in Form einer Reihe anschreiben

$$V = \Sigma\, b_n \frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{\varrho_n}{r_0}(z+h)}{\mathfrak{Sin}\,\frac{\varrho_n}{r_0}h}\cdot J_1\left(\frac{\varrho_n}{r_0}r\right).$$

Für $z = 0$ wird das

$$V = \Sigma\, b_n\, J_1\left(\frac{\varrho_n}{r_0}r\right).$$

Andererseits ist aber auf der rotierenden Scheibe $V = \omega r$, wenn ω die gegebene Winkelgeschwindigkeit bedeutet. Entwickeln wir r in einer Reihe nach Besselschen Funktionen erster Ordnung

$$r = \Sigma\, A_n J_1\left(\frac{\varrho_n}{r_0}r\right),$$

so erhält man für die A_n

$$A_n = \frac{\int_0^{r_0} r^2 J_1\left(\frac{\varrho_n}{r_0}r\right)dr}{\int_0^{r_0} r\,J_1^2\left(\frac{\varrho_n}{r_0}r\right)dr}.$$

[1]) Hort: Die Geschwindigkeitsverteilung im Innern zäher, rotierender Flüssigkeiten. Zeitschr. f. techn. Phys. Bd. 1 (1920).

Nun ist aber

$$\int_0^{r_0} r^2 J_1\left(\frac{\varrho_n}{r_0} r\right) d r = \frac{r_0^3}{\varrho_n^3} \int_0^{\varrho_n} \xi^2 J_1(\xi)\, d\xi = \frac{r_0^3}{\varrho_n^3} \cdot \varrho_n^2 J_2(\varrho_n),$$

$$\int_0^{r_0} r J_1^2\left(\frac{\varrho_n}{r_0} r\right) d r = \frac{r_0^2}{\varrho_n^2} \int_0^{\varrho_n} \xi J_1^2(\xi)\, d\xi = -\frac{r_0^2}{\varrho_n^2} \cdot \frac{\varrho_n^2}{2} J_0(\varrho_n) J_2(\varrho_n).$$

Berücksichtigt man noch, daß wegen der Beziehung

$$J_{(n-1)}(r) + J_{(n+1)}(r) = \frac{2n}{r} J_n(r),$$

für $n = 1$ und $r = \varrho_n$ folgt

$$J_0(\varrho_n) = -J_2(\varrho_n),$$

so folgt für A_n

$$A_n = \frac{2 r_0}{\varrho_n} \cdot \frac{1}{J_2(\varrho_n)}.$$

Da $\omega A_n = b_n$ sein muß, so erhält man als Lösung der Aufgabe

$$V = 2\,\omega\, r_0 \sum \frac{\operatorname{Sin}\frac{\varrho_n}{r_0}(z+h) \cdot J_1\left(\frac{\varrho_n}{r_0} r\right)}{\varrho_n \operatorname{Sin}\frac{\varrho_n}{r_0} h \;\; J_2(\varrho_n)}.$$

Diese Lösung dürfte auch bei nicht verschwindender Spaltbreite die Geschwindigkeitsverteilung recht gut wiedergeben, natürlich nur in einiger Entfernung vom Spalt. Für die Widerstandsberechnung bei endlichem Spalt ist sie aber unbrauchbar, da hierfür gerade die Verhältnisse im Spalt und dessen nächster Umgebung von ausschlaggebender Bedeutung sind. Da es nun von vornherein ziemlich aussichtslos erscheint, die Differentialgleichung (4) bei endlicher Spaltbreite geschlossen zu integrieren, werden wir einen andern Weg zur Lösung einschlagen, indem wir das ganze Problem auf eine Randwertaufgabe der Potentialtheorie zurückführen.

3. Aufstellung der Integralgleichung. Wir hatten im Abschn. **1** gesehen, daß jedes Flüssigkeitsteilchen eine Kreisbahn um die Rotationsachse beschreibt. Setzen wir [1])

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad v = +\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad V = \frac{\partial \varphi}{\partial r},$$

so wird durch diesen Ansatz die Kontinuitätsgleichung in ihrer jetzigen Gestalt

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

identisch befriedigt. An Stelle von Gl. (4) tritt dann, weil damit $\Delta u = \Delta v = 0$ erfüllt wird:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \equiv \Delta \varphi = 0 \quad (5).$$

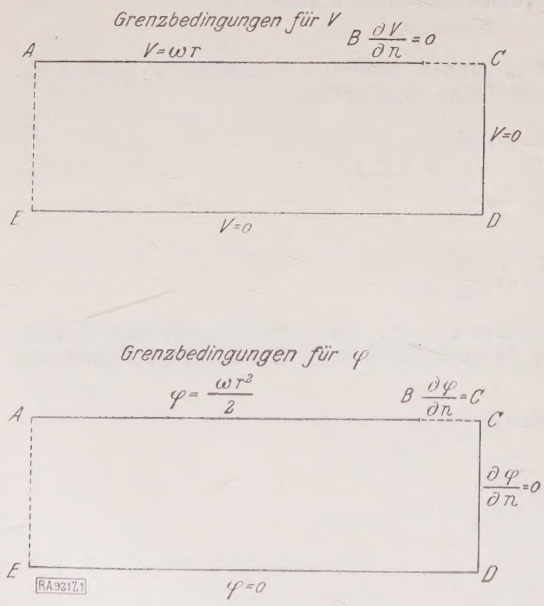

Abb. 1.

Wir stellen hier zunächst die Grenzbedingungen für die Geschwindigkeit V zusammen, um aus ihnen die Grenzbedingungen für unsere »Potentialfunktion« zu gewinnen. Es ist (siehe Abb. 1 a)

a) auf den festen Gefäßwänden $V = 0$,
b) auf der rotierenden Scheibe $V = \omega r$,
c) im Spalt $\frac{\partial V}{\partial z} = 0$.

Die Randbedingungen a) und b) folgen aus der Grundeigenschaft der zähen Flüssigkeiten, an festen Wänden zu

[1]) Brillouin: La viscosité des liquides et des Gaz. Paris 1907, I, 6.

haften, die Bedingung c) aus der Symmetrie der ganzen Anordnung gegenüber der Scheibenebene.

Für die Funktion φ folgt daraus (siehe Abb. 1 b):

auf den festen Wänden und der Achse $\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0$,

auf der rotierenden Scheibe $\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \omega r$,

im Spalt $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z} = 0$.

Diese Bedingungen können wir teilweise noch vereinfachen.

Auf den Geraden AC und DE ist z konstant, so daß wir erhalten:

auf DE $\varphi = \text{konst.} = 0$, auf AB $\varphi = \frac{\omega r^2}{2}$, auf BC $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \text{konst.} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{r_1 - \varepsilon}$ (6).

Von der Differentialgleichung (5) und den Randbedingungen (6) können wir nun mittels der Greenschen Formel leicht auf eine Integralgleichung übergehen, die nur noch die Randwerte des Potentials und seine Normalableitungen enthält.

Es ist für einen beliebigen Punkt im Innern des Bereiches

$$-4\pi\varphi(s) = \int \varphi(t) \frac{\partial 1/r}{\partial n} df - \int \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma(t)}{\partial n} df \quad \ldots\ldots (7).$$

Hierin bedeutet in der üblichen Weise s den Aufpunkt und t einen Punkt der Begrenzung; r ist der Abstand der Punkte s und t, n ist die äußere Normale.

Zu der gesuchten Integralgleichung gelangen wir nun, indem wir den Punkt s in die Berandung hineinrücken lassen; um das Verhalten der Integrale dabei untersuchen zu können, wollen wir den Punkt s durch einen kleinen Kreis vom Radius ε aus der Begrenzungsfläche ausschneiden und die Integrale für jedes Flächenstück einzeln betrachten. Rückt nun der Aufpunkt in s hinein, so bleiben in den Integralen, soweit sie über die Restfläche erstreckt werden, die Integranden überall endlich, da für sie s auch weiterhin ein äußerer Punkt bleibt. In dem zweiten Integral wird zwar, wenn wir es über den Kreis erstrecken, r unendlich klein erster Ordnung, aber der Zähler wegen $df = r^2 d\Omega$ ($d\Omega$ ist das Element des räumlichen Winkels, unter dem die Fläche vom Aufpunkt erscheint) unendlich klein zweiter Ordnung, so daß das ganze Integral nur einen mit ε gegen Null gehenden Beitrag liefert. In dem ersten Integral schließlich können wir für $-\frac{\partial 1/r}{\partial n} df$ auch $d\Omega$ schreiben. Lassen wir also den Aufpunkt in den kleinen Kreis hineinrücken, so wird der räumliche Winkel 2π ganz unabhängig vom Radius ε. Gehen wir zur Grenze $\varepsilon \to 0$, so wird für einen Randpunkt

$$-2\pi\varphi(s) = \int \varphi(t) \frac{\partial 1/r}{\partial n} df - \int \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma(t)}{\partial n} df \quad \ldots\ldots (8),$$

wobei die Integrale über die ganze Fläche zu erstrecken sind, das erste aber mit Ausschluß des Punktes s.

In dieser Formel kommen jetzt nur noch die Randwerte von φ und seiner Normalableitungen vor; zur Berechnung des Widerstandes brauchen wir aber, wie wir gleich sehen werden, nur die Werte von $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ auf der rotierenden Scheibe. Der Widerstand ist nämlich gleich dem Drehmoment der an der Platte angreifenden Schubkräfte, die infolge der inneren Reibung der Flüssigkeit entstehen. Für diese Schubkraft gibt

$$\tau = \mu \frac{\partial V}{\partial n},$$

das Drehmoment der in einem Kreisring vom Radius r und der Breite dr wirkenden Schubkräfte ist also

$$dW = r\, df \cdot \tau = 2\pi\mu r^2 \frac{\partial V}{\partial n} dr,$$

und für den gesamten Widerstand folgt daraus

$$W = 2 \cdot 2\pi\mu \int_0^{r_1} r^2 \frac{\partial V}{\partial n} dr \quad \ldots\ldots (9).$$

Der Faktor 2 tritt dabei deshalb auf, weil beide Seiten der Scheibe zum Widerstand denselben Beitrag liefern. Nun war

$$V = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \qquad \frac{\partial V}{\partial n} = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r\, d z}$$

und

$$W = -4\pi\mu \int_0^{r_1} r^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r\, d z}\, d r = -4\pi\mu \left\{ \left[r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_{r=r_1} - 2 \int_0^{r_1} r \frac{\partial \varphi}{\partial z}\, d r \right\} \qquad (9\,\mathbf{a}).$$

Unsere Aufgabe reduziert sich somit auf die Auflösung der Integralgleichung (8). Für die numerische Rechnung ist sie aber in ihrer jetzigen Form wenig geeignet; wir wollen sie daher im nächsten Abschnitt insofern wesentlich vereinfachen, daß wir die Oberflächen-Integrale in solche umgestalten, die nur noch über die Begrenzung eines Meridianschnittes zu erstrecken sind, was durch Berücksichtigung der axialen Symmetrie leicht gelingt.

4. Vereinfachung der Integrale.[1]) In Zylinderkoordinaten ist der Radiusvektor gegeben durch

$$r(s,t) = \sqrt{(z_s - z_t)^2 + r_s^2 + r_t^2 - 2\, r_s r_t \cos(\varphi_s - \varphi_t)}\,.$$

Berücksichtigen wir noch, daß das Oberfächenelement gegeben ist durch

$$d f = r_t\, d t\, d \varphi_t\,,$$

wobei dt das Linienelement der Meridiankurven bedeutet, so erhalten wir für die Integrale der Gl. (8) die Darstellungen

$$\int \varphi(t) \frac{\partial\, 1/r}{\partial n}\, d f = \oint_M \int_0^{2\pi} \varphi(t) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\sqrt{(z_s - z_t)^2 + r_s^2 + r_t^2 - 2\, r_s r_t \cos(\varphi_s - \varphi_t)}} \right) r_t\, d t\, d \varphi_t\,,$$

$$\int \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi(t)}{\partial n}\, d f = \oint_M \int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi(t)}{\partial n} \frac{1}{\sqrt{(z_s - z_t)^2 + r_s^2 + r_t^2 - 2\, r_s r_t \cos(\varphi_s - \varphi_t)}}\, r_t\, d t\, d \varphi_t\,,$$

da infolge der Rotationssymmetrie $\varphi(t)$ und $\frac{\partial \varphi(t)}{\partial n}$ unabhängig von der Koordinate φ_t sind, können wir die Integrale auch schreiben

$$\int \varphi(t) \frac{\partial\, 1/r}{\partial n}\, d f = \oint_M \varphi(t) \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{d \varphi_t}{\sqrt{(z_s - z_t)^2 + r_s^2 + r_t^2 - 2\, r_s r_t \cos(\varphi_s - \varphi_t)}} \right\} r_t\, d t\,,$$

$$\int \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi(t)}{\partial n}\, d f = \oint_M \frac{\partial \varphi(t)}{\partial n} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{d \varphi_t}{\sqrt{(z_s - z_t)^2 + r_s^2 + r_t^2 - 2\, r_s r_t \cos(\varphi_s - \varphi_t)}} \right\} r_t\, d t\,,$$

wobei in dem ersten Integral das Zeichen $\frac{\partial}{\partial n}$ vor das innere Integral gezogen ist, was in unserem Fall natürlich zulässig ist.

Setzen wir jetzt $\varphi_t - \varphi_s = \omega$, so wird

$$\int_0^{2\pi} \frac{d \varphi_t}{\sqrt{(z_s - z_t)^2 + r_s^2 + r_t^2 - 2\, r_s r_t \cos(\varphi_s - \varphi_t)}} = \int_0^{2\pi} \frac{d \omega}{\sqrt{(z_s - z_t)^2 + r_s^2 + r_t^2 - 2\, r_s r_t \cos \omega}}\,.$$

Dieses Integral, das von der Koordinate φ_t nicht mehr abhängt, wollen wir mit $2\,K(t\,s)$ bezeichnen, wobei $K(t\,s)$ ein vollständiges elliptisches Integral erster Art ist, das wir jetzt noch auf die Normalform bringen wollen. Bezeichnen wir mit R_1 den Abstand des Punktes t vom Punkte s, mit R_2 den Abstaud von t von dem Spiegelbild von s an der z-Achse, setzen also

$$R_1^{\,2} = (r_s - r_t)^2 + (z_s - z_t)^2 = r_s^2 + r_t^2 - 2\, r_s r_t + (z_s - z_t)^2\,,$$
$$R_2^{\,2} = (r_s + r_t)^2 + (z_s - z_t)^2 = r_s^2 + r_t^2 + 2\, r_s r_t + (z_s - z_t)^2\,,$$

so erhalten wir

$$r_s^2 + r_t^2 + (z_s - z_t)^2 = {}^1/_2\,(R_1^{\,2} + R_2^{\,2})\,, \qquad 2\, r_s r_t = {}^1/_2\,(R_2^{\,2} - R_1^{\,2})\,,$$

---

[1]) Zu diesem und dem folgenden Abschnitt vergl. E. Trefftz »Kontraktion kreisförmiger Flüssigkeitsstrahlen«, Zeitschr. f. Math. u. Physik, Bd. 64 (1917).

damit erhalten wir für $K(t\,s)$

$$K(t\,s) = \int_0^{\pi} \frac{d\,\omega}{\sqrt{{}^1/_2\,(R_1^2 + R_2^2) - {}^1/_2\,(R_2^2 - R_1^2)\cos\omega}} = \int_0^{\pi} \frac{d\,\omega}{\sqrt{R_1^2\cos^2\omega/2 + R_2^2\sin^2\omega/2}}.$$

Für die numerische Rechnung ist es bequemer, dieses Integral noch einmal nach der Methode des arithmetisch-geometrischen Mittels zu transformieren.

Setzen wir also

$$\varrho = {}^1/_2\,(R_1 + R_2)\,, \qquad \varrho' = \sqrt{R_1\,R_2}\,, \qquad \alpha = \omega/2\,,$$

so erhalten wir

$$K(t\,s) = 2\int_0^{\pi/2} \frac{d\,\alpha}{\sqrt{\varrho^2\cos^2\alpha + \varrho'^2\sin^2\alpha}} = \frac{2}{\varrho}\int_0^{\pi/2} \frac{d\,\alpha}{\sqrt{1 - \frac{\varrho^2 - \varrho'^2}{\varrho^2}\sin^2\alpha}}.$$

Mit $$k^2 = \frac{\varrho^2 - \varrho'^2}{\varrho^2} = \left(\frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1}\right), \qquad k = \frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1} = \frac{R_2^2 - R_1^2}{(R_2 + R_1)^2} = \frac{r_t\,r_s}{\varrho^2}$$

geht dies über in

$$K(t\,s) = \frac{2}{\varrho}\int_0^{\pi/2} \frac{d\,\alpha}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\alpha}} = \frac{2}{\varrho}\,F(k) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10),$$

wenn $F(k)$ das vollständige elliptische Integral erster Art mit dem Modul k in der Legendreschen Normalform bedeutet.

Außer $K(t\,s)$ brauchen wir noch

$$\frac{\partial K}{\partial r_t} \quad \text{und} \quad \frac{\partial K}{\partial z_t}.$$

Wir erhalten dafür

$$\frac{1}{2}\frac{\partial K}{\partial r_t} = -\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial \varrho}{\partial r_t}F(k) + \frac{1}{\varrho}\frac{d\,F}{d\,k}\frac{\partial k}{\partial r_t},$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial K}{\partial z_t} = -\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial \varrho}{\partial z_t}F(k) + \frac{1}{\varrho}\frac{d\,F}{d\,k}\frac{\partial k}{\partial z_t}.$$

Mit den Bezeichnungen $E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2\sin^2\alpha}\,d\,\alpha$ für das elliptische Integral zweiter Art und $k' = \sqrt{1 - k^2}$ für den komplementären Modul erhalten wir

$$\frac{\partial F}{\partial k} = \frac{1}{k}\left\{\frac{E}{k'^2} - F\right\}, \qquad \frac{\partial \varrho}{\partial r_t} = \frac{1}{2}\left\{\frac{r_t - r_s}{\sqrt{(r_t - r_s)^2 + (z_t - z_s)^2}} + \frac{r_t + r_s}{\sqrt{(r_t + r_s)^2 + (z_t - z_s)^2}}\right\},$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial z_t} = \frac{1}{2}(z_t - z_s)\left\{\frac{1}{\sqrt{(r_t - r_s)^2 + (z_t - z_s)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(r_t + r_s)^2 + (z_t - z_s)^2}}\right\},$$

$$\frac{\partial k}{\partial r_t} = \frac{r_s}{\varrho^2} - \frac{2\,r_t\,r_s}{\varrho^3}\frac{\partial \varrho}{\partial r_t}, \qquad \frac{\partial k}{\partial z_t} = -\frac{2\,r_t\,r_s}{\varrho^3}\frac{\partial \varrho}{\partial z_t}.$$

Setzen wir diese Ausdrücke oben ein, so folgt

$$\frac{1}{2}\frac{\partial K}{\partial r_t} = -\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial \varrho}{\partial r_t}\left\{F(k) + \frac{2\,r_t\,r_s}{\varrho^2}\cdot\frac{1}{k}\left(\frac{E(k)}{k'^2} - F(k)\right)\right\} + \frac{r_s}{\varrho^3}\frac{1}{k}\left(\frac{E(k)}{k'^2} - F(k)\right)$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial K}{\partial z_t} = -\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial \varrho}{\partial z_t}\left\{F(k) + \frac{2\,r_t\,r_s}{\varrho^2}\cdot\frac{1}{k}\left(\frac{E(k)}{k'^2} - F(k)\right)\right\}.$$

Fast man die Glieder zweckmäßig zusammen, so erhält man

$$\frac{\partial K}{\partial r_t} = -\frac{2}{\varrho^2}\frac{\partial \varrho}{\partial r_t}\left\{2\,\frac{E(k)}{k'^2} - F(k)\right\} + \frac{2}{\varrho\,r_t}\left\{\frac{E(k)}{k'^2} - F(k)\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11),$$

$$\frac{\partial K}{\partial z_t} = -\frac{2}{\varrho^2}\frac{\partial \varrho}{\partial z_t}\left\{2\,\frac{E(k)}{k'^2} - F(k)\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

5. Quellringströmung. Die Funktion $K(t\,s)$ stellt, wie aus ihrer Ableitung ohne weiteres hervorgeht, das Potential eines gleichmäßig mit Quellen belegten Kreises vom Radius r_s dar, der in der Ebene $z = z_s$ mit dem Mittelpunkt auf der Rotationsachse liegt. Da diese Quellringströmung für uns große Bedeutung besitzt, wird es zweckmäßig sein, wenn wir uns über diese Strömung einen Ueberblick verschaffen. In allen Fällen rotationssymme-

trischer Bewegung einer idealen Flüssigkeit kann man ähnlich wie im Zweidimensionalen eine Stromfunktion definieren, die bis auf den Faktor 2π gleich dem Fluß durch die Fläche ist, die durch Rotation einer beliebigen Verbindungslinie des zugehörigen Punktes mit der z-Achse um diese Achse entsteht. Zu den Beziehungen, die zwischen den Geschwindigkeiten und dieser Stromfunktion besteht, kommen wir am einfachsten auf folgende Weise [1]).

Wenn wir zum Ausdruck bringen wollen, daß der gesamte Fluß in dem ringförmigen Raum, der durch die Rotation eines rechtwinkligen Flächenelementes $d\,r\,d\,z$ um die z-Achse entsteht, Null ist, so haben wir

$$\frac{\partial}{\partial z}(w \cdot 2\pi r\,d\,r)\,d\,z + \frac{\partial}{\partial r}(R \cdot 2\pi r\,d\,z)\,d\,r = 0\,,$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial z}(w\,r) + \frac{\partial}{\partial r}(R\,r) = 0\,,$$

d. h. aber

$$r\,R\,d\,z - r\,w\,d\,r$$

ist ein vollständiges Differential. Bezeichnen wir dies mit $d\,\psi$, so erhalten wir

$$w = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\,, \qquad R = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z}\,,$$

andererseits ist aber auch

$$w = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}\,, \qquad R = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}\,.$$

Durch Vergleich beider Ausdrücke folgt

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = -r\frac{\partial \varphi}{\partial n}\,, \qquad \psi(P) = -\int_0^P r\frac{\partial \varphi}{\partial n}\,d\,s \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13),$$

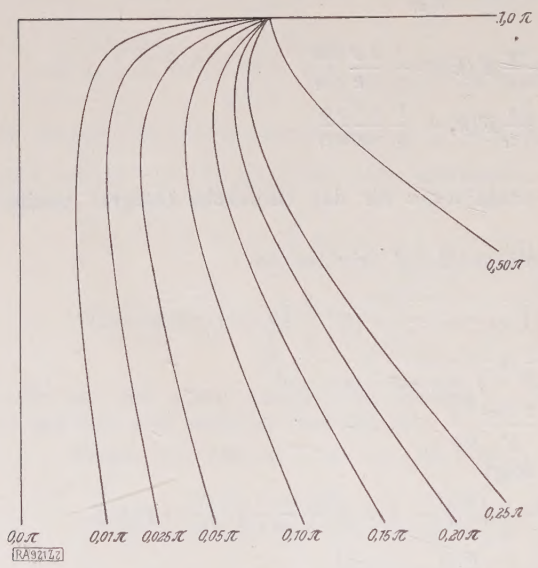

Abb. 2.

was mit der obigen Definition übereinstimmt.

Bei der Quellringströmung muß aus Symmetriegründen die z-Achse Stromlinie sein, ebenso die Geraden $z = z_s$. Gehen wir sehr dicht an den Punkt s heran, so nähert sich das Strombild immer mehr dem einer geraden Quellinie, die Stromlinien gehen also von dort unter gleichen Winkelabständen auseinander. Diejenige Stromlinie, die entlang der Geraden $z = z_s$ läuft, teilt sich in ihrem Schnittpunkte mit der z-Achse. Ein Teil läuft entlang der z-Achse nach oben ins Unendliche, ein Teil nach unten. Dieser Stromlinie legen wir den Wert $\psi = 0$ bei. Ueber das Stromlinienbild in großer Entfernung können wir leicht mit Hilfe der Stokesschen Stromfunktion einen Ueberblick gewinnen. Gehen wir sehr weit vom Quellring fort, werden also R_1 und R_2 sehr groß, so geht k gegen Null und damit $F(k)$ gegen $\pi/2$, womit wir erhalten

$$K(t\,s) \sim \pi/\varrho\,.$$

In großer Entfernung wirkt also der Quellring wie eine Punktquelle im Mittelpunkt. Wählen wir als Integrationsweg in (13) den Kreis durch P um den Punkt $r = 0$, $z = z_s$, so erhalten wir

$$r = \varrho \sin\vartheta\,, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial K}{\partial n} = -\frac{\pi}{\varrho^2}\,, \qquad d\,s = \varrho\,d\,\vartheta$$

und damit

$$\psi(t\,s) = \pi\int_0^{\vartheta} \sin\vartheta\,d\,\vartheta = \pi(1 - \cos\vartheta)\,.$$

[1]) Lamb, Hydrodynamik. § 94.

Der von s entlang der Geraden $z = z_s$ ins Unendliche laufenden Stromlinie kommt also der Wert $\psi = \pi$, der positiven z-Achse der Wert $\psi = 2\pi$ zu. Den Verlauf der übrigen Stromlinien und ihrer Asymptoten zeigt Abb. 2, in der aus Symmetriegründen nur der rechte untere Quadrant gezeichnet wurde.

6. Ansatz zur numerischen Auflösung. Mittels der Quellringströmung geht die Integralgleichung (8) über in

$$2\pi\varphi(s) = 2\oint\left\{K(ts)\,r(t)\,\frac{\partial\varphi(t)}{\partial n} - \varphi(t)\,\frac{\partial K(ts)}{\partial n}\,r(t)\right\}dt\,. \quad . \quad . \quad . \quad (14),$$

wobei das Integral jetzt nur noch über den Meridianschnitt zu erstrecken ist. Wir stellen noch einmal die Grenzbedingungen für φ zusammen (siehe Abb. 1b). Es ist

$$\text{auf } AB\ \varphi = \frac{\omega r^2}{2}, \qquad \text{auf } BC\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{r=r_1}$$

$$\text{auf } CD\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0, \qquad \text{auf } DE\ \varphi = 0.$$

Unbekannt ist φ auf BC und CD, $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ auf AB und DE. Die Integrale über das Stück AE verschwinden sämtlich wegen $r = 0$; schließlich ist noch $\frac{\partial K}{\partial n}$ Null auf AE bzw. ED, falls der Aufpunkt auf diesen Strecken liegt, da dann nach dem vorigen Abschnitt diese Geraden Stromlinien für die Quellringströmung sind. Schreiben wir also die Gl. (14) für die verschiedenen Begrenzungsgeraden unseres Bereiches an, so erhalten wir mit $\omega = 1$

a) Der Aufpunkt liegt zwischen A und B. Es verschwinden die Integrale

$$\int_A^B \varphi\, r\,\frac{\partial K}{\partial n}\,dt, \qquad \int_E^D \varphi\, r\,\frac{\partial K}{\partial n}\,dt, \qquad \int_D^C r\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,K\,dt$$

und wir erhalten

$$\frac{\pi r^2}{2} = -\int_A^B r\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,K\,dr - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{r=r_1}\int_B^C r\,K\,dr - \int_D^C \varphi\, r\,\frac{\partial K}{\partial r}\,dz - \int_E^D Kr\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,dr\,.$$

b) Der Aufpunkt liegt zwischen B und C. Die rechte Seite von a) bleibt unverändert, das Potential ist aber jetzt unbekannt, so daß wir erhalten

$$\pi\varphi(s) = -\int_A^B r\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,K\,dr - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{r=r_1}\int_B^C r\,K\,dr - \int_D^C \varphi\, r\,\frac{\partial K}{\partial r}\,dz - \int_E^D Kr\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,dr\,.$$

c) Der Aufpunkt liegt zwischen C und D. Es verschwinden die Integrale

$$\int_D^C rK\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dt, \qquad \int_E^D \varphi\, r\,\frac{\partial K}{\partial n}\,dt;$$

folglich

$$\pi\varphi(s) = \frac{1}{2}\int_A^B r^3\,\frac{\partial K}{\partial z}\,dr + \int_B^C \varphi\, r\,\frac{\partial K}{\partial z}\,dr - \int_A^C rK\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,dr - \int_D^C \varphi\, r\,\frac{\partial K}{\partial r}\,dz - \int_E^D rK\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,dr\,.$$

d) Der Aufpunkt liegt zwischen E und D. Es verschwinden dieselben Integrale wie im vorigen Fall, das Potential ist jetzt aber Null, folglich

$$0 = \frac{1}{2}\int_A^B r^3\,\frac{\partial K}{\partial z}\,dr + \int_B^C \varphi\, r\,\frac{\partial K}{\partial z}\,dr - \int_A^C rK\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,dr - \int_D^C \varphi\, r\,\frac{\partial K}{\partial r}\,dz - \int_E^D rK\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,dr\,.$$

Diese Integralgleichungen haben wir nun nach den unbekannten Randwerten aufzulösen. Wir werden hierbei so vorgehen, daß wir die Integralgleichungen in eine Anzahl linearer Gleichungen zerlegen und diese dann nach den Unbekannten auflösen, so daß wir eine Reihe von Werten der gesuchten Funktionen erhalten.

Bei dieser Auflösung in lineare Gleichungen tritt insofern noch eine Schwierigkeit auf, als der Integrand in allen Fällen an der Stelle des Aufpunktes unendlich wird.

Um diese Schwierigkeit zu beseitigen, schreiben wir in den Fällen a), b), d) das betreffende Integral wie folgt um:

$$\int r K \frac{\partial \varphi}{\partial z} d r = \int r K \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_s \right\} d r + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_s \int r K d r .$$

Dann bleibt in dem ersten Integral der Integrand endlich, das zweite können wir geschlossen auswerten (siehe den folgenden Abschnitt). Aehnliches gilt von dem im Falle c) auftretenden Integral, das wir ebenso behandeln

$$\int r \varphi \frac{\partial K}{\partial n} d t = \int r (\varphi - \varphi_s) \frac{\partial K}{\partial n} d t + \varphi_s \int r \frac{\partial K}{\partial n} d t .$$

Hierbei ist bei dem zweiten Integral $\int r \frac{\partial K}{\partial n} d t = - \int d \psi$ zu beachten, daß es unter Ausschluß des Punktes s zu berechnen ist.

Integrieren wir entlang der Kontur bis zum Punkt s, so nähert sich $\psi (t\, s)$ einem Grenzwert, den wir mit $\psi (s_1\, s)$ bezeichnen wollen. Gehen wir dann über s hinweg, so springt die Stromfunktion um den Betrag π, hat also jetzt den Wert $\psi (s_1\, s) + \pi$.

Für das Integral erhalten wir also

$$\int_a^b r \frac{\partial K}{\partial n} d t = - \int_a^b d \psi = - \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_a^{s-\varepsilon} d \psi + \int_{s+\varepsilon}^b d \psi \right\}$$

$$= - \psi (s\, b) + \psi (s_1\, s) + \pi - \psi (s_1\, s) + \psi (s\, a)$$

oder

$$\int_a^b r \frac{\partial K}{\partial n} d t = - \psi (s\, b) + \psi (s\, a) + \pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15),$$

wobei wir die Werte der Stromfunktion an den Stellen a und b leicht numerisch bestimmen können. Nach der Definition der Stromfunktion ist dabei, wenn wir als Integrationsweg eine Parallele zur r-Achse wählen:

$$\psi (s\, a) = \int_0^a r \frac{\partial K}{\partial z} d r , \qquad \psi (s\, b) = 2 \pi - \int_0^b r \frac{\partial K}{\partial z} d r .$$

7. Auswertung einiger Integrale. Wir hatten im vorigen Abschnitt bereits darauf hingewiesen, daß das Integral

$$\int_0^r r K (t\, s) d t ,$$

erstreckt über eine Parallele zur r-Achse, sich geschlossen auswerten läßt, falls der Aufpunkt selbst auf dieser Strecke liegt. Wir wollen diese Rechnung jetzt durchführen. Wegen der Voraussetzung ist $z_t = z_s$, was für die allgemeinen Formeln des Abschn. 4 wesentliche Vereinfachungen bringt. Teilen wir den Integrationsweg in zwei Teile $r_t < r_s$ und $r_t > r_s$, so folgt:

a) $r_t < r_s$: $\quad R_1 = r_s - r_t , \quad R_2 = r_s + r_t , \quad \varrho_{st} = r_s , \quad k = \frac{r_s r_t}{\varrho^2} = \frac{r_t}{r_s}$

b) $r_t > r_s$: $\quad R_1 = r_t - r_s , \quad R_2 = r_t + r_s , \quad \varrho_{st} = r_t , \quad k = \frac{r_s r_t}{\varrho^2} = \frac{r_s}{r_t}$.

Hiermit erhalten wir für das gesuchte Integral

$$\int_0^{r_0} r_t K (t\, s) d r_t = 2 \left\{ \int_0^{r_s} \int_0^{\pi/2} \frac{r_t}{r_s} \frac{d r_t d \alpha}{\sqrt{1 - \left(\frac{r_t}{r_s}\right)^2 \sin^2 \alpha}} = \int_{r_s}^{r_t} \int_0^{\pi/2} \frac{d r_t d \alpha}{\sqrt{1 - \left(\frac{r_s}{r_t}\right)^2 \sin^2 \alpha}} \right\} .$$

Das erste Integral liefert durch Integration nach r_t

$$2 r_s \int_0^{\pi/2} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{r_t}{r_s}\right)^2 \sin^2 \alpha} \right]_0^{r_s} \frac{d \alpha}{\sin^2 \alpha} = 2 r_s \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} d \alpha = 2 r_s .$$

Aus dem zweiten Integral folgt ebenfalls durch Integration nach r_t

$$2\int_0^{\pi/2}\left(\int_{r_s}^{r_0}\frac{r_t\,d\,r_t}{\sqrt{r_t^2-r_s^2\sin^2\alpha}}\right)d\,\alpha = 2\int_0^{\pi/2}\left[\sqrt{r_t^2-r_s^2\sin^2\alpha}\right]_{r_s}^{r_0}d\,\alpha$$

$$= 2\,r_0\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\left(\frac{r_s}{r_0}\right)^2\sin^2\alpha}\;d\alpha - 2\,r_s = 2\left(r_0\,E\left(\frac{r_s}{r_0}\right)-r_s\right).$$

Somit erhalten wir für $z_s = z_t$ $r_0 > r_s$

$$\int_0^{r_0} r_t\,K(ts)\,d\,r_t = 2\,r_0\,E\left(\frac{r_s}{r_0}\right) \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (16).$$

8. Numerische Auflösung der Integralgleichung. Um einen Ueberblick über die Abhängigkeit des Widerstandes von der Spaltbreite und dem Seitenverhältnis des Zylinders zu gewinnen, habe ich die Integralgleichung (14) in insgesamt sieben Fällen numerisch aufgelöst und zwar für die Seitenverhältnisse $h/r_0 = 0{,}25$ und $h/r_0 = 0{,}15$ für je drei Spaltbreiten von $0{,}10\,r_0$, $0{,}06\,r_0$ und $0{,}02\,r_0$, sowie für ein Seiterverhältnis von zwei zu eins und einer Spaltbreite von $0{,}1\,r_0$. Für die Rechnung wurden alle vorkommenden Größen auf den Zylinderradius als Einheit bezogen und damit dimensionslos gemacht. Für den Widerstand ergibt sich mit diesem Ansatz

$$W = 4\,\pi\,\mu\,\omega\,{r_0}^3\cdot\zeta\,,$$

wobei ζ ein dimensionsloser Faktor ist, den ich für die obengenannten Fälle berechnet habe. Zuerst habe ich nach den Formeln (10) bis (12) das Potential der Quellringströmung

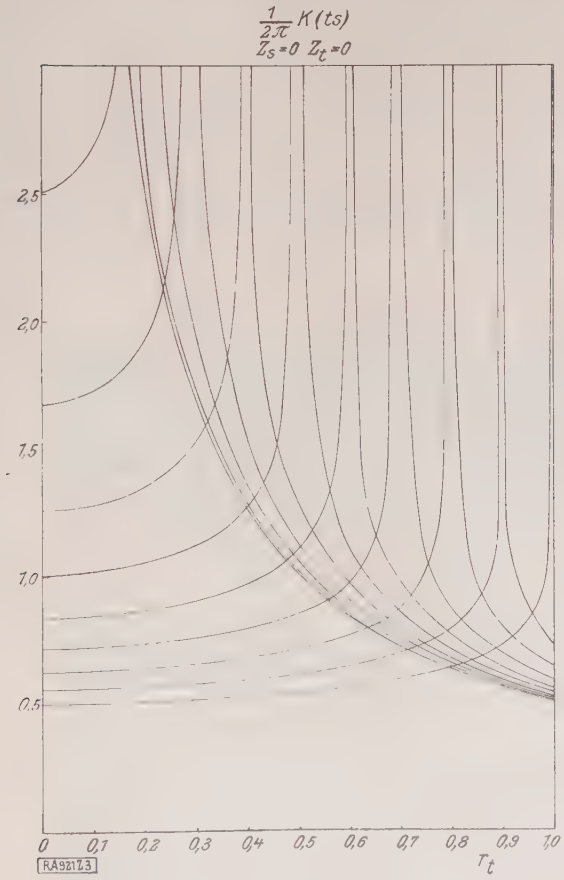

Abb. 3.

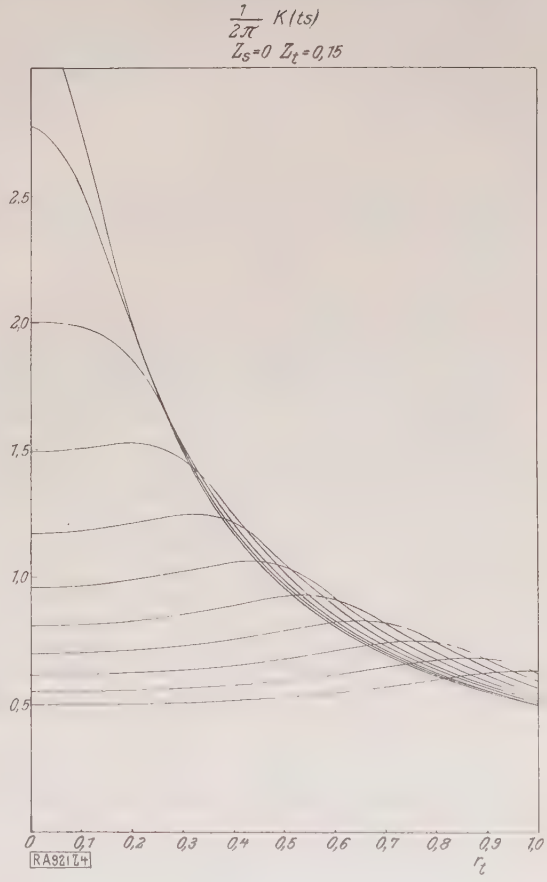

Abb. 4.

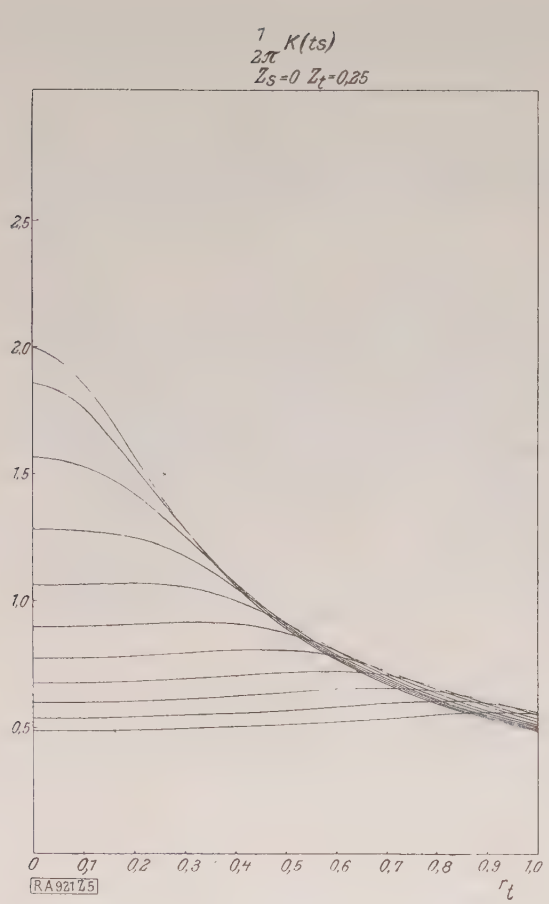

Abb. 5.

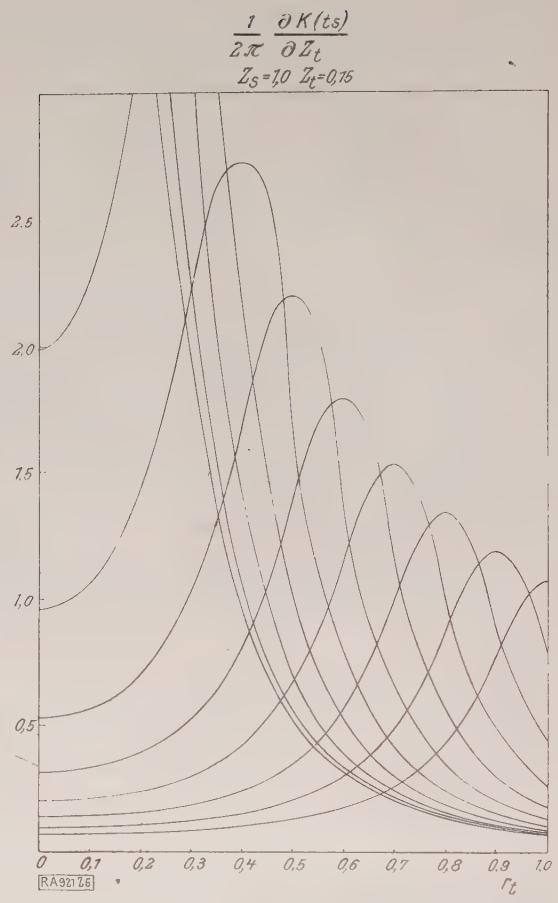

Abb. 6.

und seine Ableituugen nach den Koordinaten an den erforderlichen Punkten berechnet (siehe die Abb. 3 bis 8). Ich habe von vornherein mit einer solchen Stellenzahl gerechnet, daß die Koeffizienten der Unbekannten in den linearen Gleichungen höchstens in besonders ungünstigen Fällen um ein bis zwei Einheiten der (letzten) vierten Dezimalen falsch sein können. Um diese Genauigkeit zu erreichen, habe ich zur Bestimmung der vollständigen elliptischen Integrale auf eine Benutzung der Tafeln von Jahnke-Emde wegen ihrer schlechten Interpolationsmöglichkeit und geringen Stellenzahl verzichten müssen und mich der von Witt (Astronomische Nachrichten Bd. 165) gegebenen Tafeln bedient. Nach Witt ist ($\vartheta = \arcsin k \leqq \pi/3$)

$$F(\sin\vartheta) = \sec\frac{\vartheta}{2}\sqrt[4]{\sec\vartheta}\cdot b_1\,, \qquad E(\sin\vartheta) = \cos^3\frac{\vartheta}{2}\sqrt[4]{\sec\vartheta}\cdot b_2$$

für $\log b_1$ und $\log b_2$ gibt Witt Tafeln an. Für $\vartheta > \pi/3$ werden die Formeln wesentlich komplizierter, sind aber trotzdem zu einer genauen und nicht zu umständlichen Berechnung von F und E sehr gut zu gebrauchen. Mit den so bestimmten Werten von K und $\frac{\partial K}{\partial n}$ wurden dann für die Seitenverhältnisse 0,15 und 0,25 die Gleichungen (a) bis (d) des Abschn. **6** an insgesamt 24 bzw. 26 Stellen angeschrieben, nämlich auf den wagerechten Begrenzungsgeraden des Integrationsbereiches an den Punkten 0,1 bis 0,9 in Schritten von 0,1; ferner für 0,94 und 0,98, und zwar sowohl oben wie unten, endlich an der senkrechten Begrenzung in Schritten von 0,05. Bei dem Zylinder mit dem Seitenverhältnis 2 : 1, der technisch weniger Interesse bietet und nur gerechnet wurde, um die Abhängigkeit des Widerstandes vom Seitenverhältnis festzustellen, wurde von einer Unterteilung

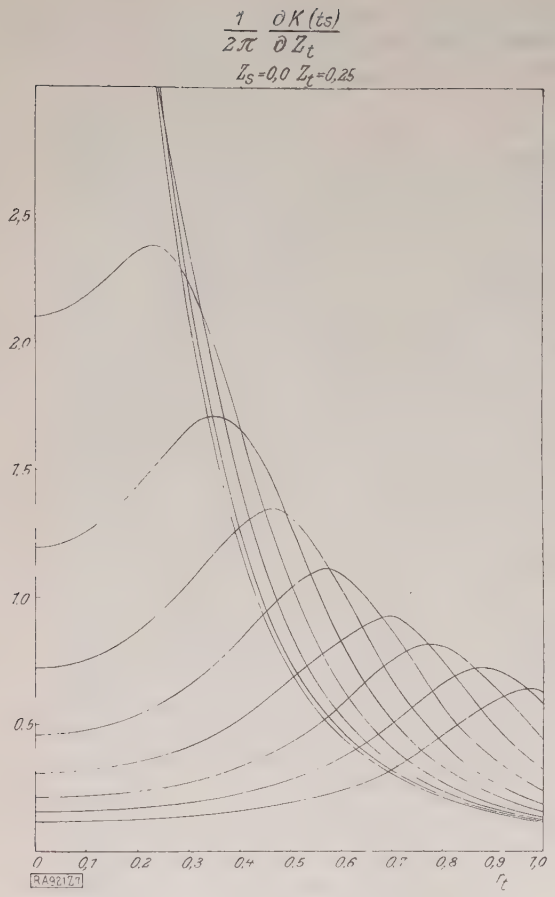

Abb. 7.

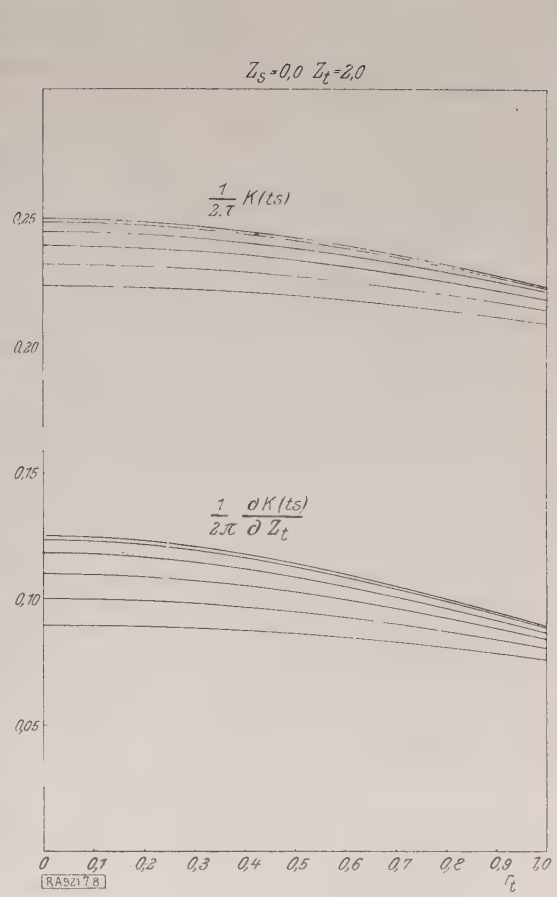

Abb. 8.

des Spaltes abgesehen und außerdem für die seitliche Begrenzung größere Intervalle gewählt. Die Auflösung des so entstehenden Gleichungssystemes, für die ich das etwas modifizierte Iterationsverfahren angewandt habe, will ich hier an dem Beispiel des Zylinders vom Seitenverhältnis 2 : 1 und der Spaltbreite 0,1 auseinandersetzen. In diesem Falle habe ich die Unterteilung so vorgenommen, daß auf den wagerechten Begrenzungen je neun und auf den senkrechten sieben Teilpunkte liegen. Wir erhalten somit ein System von 25 linearen Gleichungen, die sich aber infolge der Symmetrie ihrer Koeffizienten auf ein System von 12 und ein System von 13 Gleichungen reduzieren lassen. Spiegelt man nämlich ein a_{ik} einmal an der einen Mittelsenkrechten der Koeffizientenmatrix und dann nochmals an der zweiten Mittelsenkrechten, so erhält man in der Matrix wieder denselben Koeffizienten, oder mit anderen Worten: es ist $a_{ik} = a_{n+1-i,n+1-k}$, da in unserem Falle n eine ungerade Zahl ist. Addieren und subtrahieren wir also entsprechende Gleichungen und führen als neue Unbekannte die Summe und Differenzen der alten ein, so zerfällt das Gleichungssystem in zwei neue mit 12 bzw. 13 Unbekannten. In dem durch Addition entstehenden System (als »Summengleichungen« bezeichnet) haben wir als Unbekannte

$$S_i = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{oi} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{ui}; \qquad i = 0{,}1,\ 0{,}2,\ \ldots\ 0{,}9$$

$$\Sigma_i = (q_s)_i + (q_s)_{2,0-i}; \qquad i = 0{,}1,\ 0{,}4,\ 0{,}7; \qquad \Sigma_{1,0} = (q_s)_{1,0}.$$

Dabei bedeutet der Index 0, daß sich $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ auf die obere wagerechte Begrenzung bezieht, der Index u das Entsprechende für die untere und der Index s für die seitliche Begrenzung.

Aehnliches gilt für das durch Subtraktion entstehende System (als »Differenzengleichungen« bezeichnet), für das die Unbekannten die folgende Bedeutung haben

$$D_i = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{oi} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{ui}; \quad i = 0{,}1,\ 0{,}2,\ \ldots\ 0{,}9; \quad \Delta_i = (\varphi_s)_i - (\varphi_s)_{1{,}0-i}; \quad i = 0{,}1,\ 0{,}4,\ 0{,}7.$$

Die Unbekannte $(\varphi_s)_{1,0}$ fällt jetzt vollständig heraus. — Betrachtet man das so entstehende Koeffizientenschema (s. die beiden folgenden Blätter), so zeigt sich folgendes: die Koeffizienten der Unbekannten S_i bzw. D_i nehmen für beide Systeme, und zwar bei den Differenzengleichungen stärker als bei den Summengleichungen, rechts und links von der Hauptdiagonale ab; dieser Abfall ist wiederum nach links stärker als nach rechts. Daß die Koeffizienten von $S_{0,9}$ und $D_{0,9}$ aus diesem Gang scheinbar herausfallen, liegt an der größeren Intervallbreite an dieser Stelle. Betrachtet man also diese Unbekannten für sich allein, so liegt es nahe, dieses Teilsystem durch Iteration zu lösen und zwar so, daß man in der neunten Gleichung alle Glieder bis auf das neunte streicht, dann $S_{0,9}$ bzw $D_{0,9}$ aus der rechten Seite bestimmt und in die achte einsetzt, hierauf in dieser alle Glieder bis auf das achte und neunte streicht und $S_{0,8}$ bzw. $D_{0,8}$ berechnet und so fort. Auch für das ganze System unter Einbeziehung der Unbekannten Σ_i und Δ_i bleibt dieses Auflösungsverfahren prinzipiell bestehen, wie ein Blick auf das Koeffizientenschema lehrt. Immerhin ist die Abnahme der Koeffizienten nicht so bedeutend, daß sich eine Iteration lohnen würde, wenn man gar keine Anhaltspunkte über die Größenordnung der Unbekannten hätte. Hat man aber schon eine einigermaßen gute Näherung zur Verfügung, so scheint mir auch in diesem Falle das Iterationsverfahren dem Gaußschen Algorithmus überlegen, einerseits wegen der Zeitersparnis, andererseits wegen der automatischen Kontrolle der Richtigkeit der Rechnung, die beim Gaußschen Algorithmus nur mittels der — für die Reduktion an sich unnötigen und zeitraubenden — Summenproben möglich ist. Eine solche erste Näherung können wir uns in diesem Falle aber leicht durch eine ganze grobe Unterteilung der Berandung verschaffen. Zu diesem Zwecke habe ich jede Begrenzungsgerade in je drei Teile zerlegt, so daß die Summengleichungen fünf und die Differenzengleichungen vier Unbekannte enthalten; diese Gleichungen und ihre Auflösungen habe ich auf den folgenden Seiten zusammengestellt. Diese Werte stellen nun für uns die gewünschte erste Näherung dar, mit der wir die Iteration beginnen können.

Um die Konvergenz zu beschleunigen, habe ich nach dem in der Koeffizientenmatrix angedeuteten Schema immer drei bzw. vier Unbekannte auf einmal berechnet. Die eingerahmten Teilgleichungen wurden dazu für die rechten Seiten gleich eins aufgelöst, so daß die resultierenden rechten Seiten des vollständigen Systems nur mit den sich so ergebenden »Belastungswerten« multipliziert zu werden brauchen, um die Näherungswerte der entsprechenden Unbekannten zu erhalten. Auch diese Hilfsgleichungen und ihre Auflösungen habe ich auf den folgenden Seiten zusammengestellt. Die Auflösungen der Summengleichungen verläuft demnach folgendermaßen: Die erste Näherung für $S_{0,1}$ bis $S_{0,9}$ wird in die vier letzten Gleichungen eingesetzt und auf ihnen auf die oben angegebene Weise die ersten Näherungen für $\Sigma_{0,1}$ bis $\Sigma_{1,0}$ gewonnen. Mit den übrigen Gleichungen verfährt man genau so, indem man immer von unten nach oben fortschreitet. Um die dritte Dezimale zu sichern, habe ich die Iteration solange fortgesetzt, bis die vierten Dezimalen sich nur noch um ein bis zwei Einheiten änderten. Die so erhaltenen Näherungen sind auf denselben Blättern wie die Gleichungen zusammengestellt. Man sieht, daß ein Teil der Unbekannten »springt«, d. h. bei den aufeinanderfolgenden Näherungen um den wirklichen Wert schwankt. In einem solchen Fall rechnet man zweckmäßig mit dem arithmetischen Mittel zweier aufeinanderfolgender Näherungen, was die Konvergenz wesentlich verbessert.

Ebenso habe ich auch die Lösungen der Gleichungen in den anderen Fällen gewonnen. Die Ergebnisse dieser Rechnungen werde ich im folgenden Abschnitt näher besprechen.

9. Resultate der Arbeit. Die nach dem im vorigen Abschnitt angegebenen Verfahren berechneten Werte von $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ sind in den Tabellen der folgenden Seite zusammengestellt und in den Abb. 9 und 10 aufgetragen. Da man zu $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ nach Belieben noch eine willkürliche Konstante hinzufügen kann, habe ich die sich aus der Auflösung ergebenden Werte für $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ sämtlich auf $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{0,1} = 0$ reduziert, um eine bessere Vergleichsmöglichkeit

Differenzengleichungen: $h = 2{,}0$. Spaltbreite: 0,1.

	$D_{0,1}$	$D_{0,2}$	$D_{0,3}$	$D_{0,4}$	$D_{0,5}$	$D_{0,6}$	$D_{0,7}$	$D_{0,8}$	$D_{0,9}$	$\Delta_{0,1}$	$\Delta_{0,4}$	$\Delta_{0,7}$	
d_1	0,6372	0,4869	0,4407	0,4101	0,3839	0,3600	0,3376	0,3165	0,4355	− 1,0939	− 0,9761	− 0,4849	= + 0,0967
d_2	0,2435	0,7050	0,5022	0,4390	0,4013	0,3718	0,3461	0,3230	0,4427	− 1,1207	− 0,9874	− 0,4826	= + 0,0210
d_3	0,1469	0,3348	0,7383	0,5112	0,4372	0,3942	0,3619	0,3348	0,4558	− 1,1692	− 1,0038	− 0,4784	= − 0,1054
d_4	0,1025	0,2195	0,3834	0,7580	0,5159	0,4347	0,3878	0,3534	0,4754	− 1,2431	− 1,0237	− 0,4688	= − 0,2820
d_5	0,0768	0,1605	0,2623	0,4127	0,7703	0,5178	0,4316	0,3820	0,5040	− 1,3505	− 1,0401	− 0,4511	= − 0,5094
d_6	0,0600	0,1239	0,1971	0,2897	0,4316	0,7784	0,5184	0,4281	0,5454	− 1,5065	− 1,0437	− 0,4213	= − 0,7872
d_7	0,0482	0,0989	0,1551	0,2216	0,3083	0,4441	0,7839	0,5175	0,6087	− 1,7328	− 1,0072	− 0,3761	= − 1,1152
d_8	0,0396	0,0807	0,1256	0,1767	0,2387	0,3211	0,4527	0,7924	0,7213	− 2,0600	− 0,8976	− 0,3140	= − 1,4937
d_9	0,0329	0,0670	0,1037	0,1445	0,1922	0,2510	0,3303	0,4588	1,0524	− 2,4603	− 0,6725	− 0,2371	= − 1,9224
δ_1	0,0266	0,0541	0,0832	0,1153	0,1516	0,1944	0,2468	0,3142	0,6493	+ 4,2513	− 0,3997	− 0,1762	= − 0,6771
δ_4	0,0200	0,0405	0,0619	0,0848	0,1092	0,1354	0,1628	0,1899	0,3288	− 0,3443	+ 4,2165	− 0,2796	= − 0,3055
δ_7	0,0105	0,0211	0,0320	0,0433	0,0548	0,0665	0,0777	0,0881	0,1487	− 0,1515	− 0,2796	+ 4,3927	= − 0,1286

1	0,52	0,50	0,47	0,40	0,28	+ 0,05	− 0,35	− 0,87	− 1,70	0,154	0,098	0,048
2	0,552	0,517	0,489	0,431	0,254	+ 0,104	0	− 0,396	− 1,433	0,047	0,029	0,014
3	0,551	0,518	0,473	0,374	0,271	+ 0,116	− 0,121	− 0,516	− 1,661	0,102	0,063	0,031
4	0,5512	0,5184	0,4691	0,3863	0,2764	+ 0,1095	− 0,082	− 0,472	− 1,560	0,085	0,058	0,024
5	0,5513	0,5184	0,4683	0,3891	0,2783	+ 0,1187	− 0,0909	− 0,4802	− 1,5919	0,0797	0,0488	0,0242
6				0,3919	0,2803	+ 0,1235	− 0,0916	− 0,4757	− 1,5805	0,0855	0,0522	0,0258
7	0,5520	0,5190	0,4686	0,3913	0,2806	+ 0,1254	− 0,0971	− 0,4792	− 1,5864	0,0829	0,0506	0,0250
8				0,3914	0,2809	+ 0,1262	− 0,0971	− 0,4782	− 1,5842	0,0840	0,0513	0,0254
9	0,5521	0,5192	0,4690	0,3914	0,2809	+ 0,1265	− 0,0977	− 0,4785	− 1,5844	0,0839	0,0512	0,0253

Summengleichungen: $h = 2{,}0$. Spaltbreite: 0,1.

	$S_{0,1}$	$S_{0,2}$	$S_{0,3}$	$S_{0,4}$	$S_{0,5}$	$S_{0,6}$	$S_{0,7}$	$S_{0,8}$	$S_{0,9}$	$\Sigma_{0,1}$	$\Sigma_{0,4}$	$\Sigma_{0,7}$	$\Sigma_{1,0}$	
s_1	0,6870	0,5863	0,5889	0,6061	0,6263	0,6470	0,6676	0,6878	1,0689	− 1 3531	− 1,4235	− 1,1665	− 1,0628	= − 0,1467
s_2	0,2931	0,8040	0,6498	0,6342	0,6429	0,6580	0,6753	0,6932	1,0749	− 1,3765	− 1,4272	− 1,1516	− 1,0450	= − 0,2210
s_3	0,1963	0,4332	0,8851	0,7054	0,6774	0,6790	0,6895	0,7034	1,0856	− 1,4184	− 1,4322	− 1,1276	− 1,0146	= − 0,3446
s_4	0,1515	0,3171	0,5290	0,9506	0,7543	0,7175	0,7134	0,7198	1,1020	− 1,4841	− 1,4353	− 1,0898	− 0,9708	= − 0,5180
s_5	0,1252	0,2571	0,4065	0,6035	1,0067	0,7982	0,7514	0,7456	1,1262	− 1,5813	− 1,4315	− 1,0369	− 0,9138	= − 0,7406
s_6	0,1078	0,2193	0,3395	0,4783	0,6652	1,0558	0,8379	0,7885	1,1626	− 1,7247	− 1,4107	− 0,9653	− 0,8432	= − 1,0128
s_7	0,0954	0,1929	0,2955	0,4076	0,5389	0,7181	1,0999	0,8739	1,2201	− 1,9378	− 1,3470	− 0,8731	− 0,7592	= − 1,3348
s_8	0,0860	0,1733	0,2638	0,3599	0,4661	0,5913	0,7647	1,1446	1,3261	− 2,2502	− 1,2084	− 0,7594	− 0,6656	= − 1,7063
s_9	0,0785	0,1580	0,2395	0,3247	0,4158	0,5170	0,6377	0,8062	1,6498	− 2,6349	− 0,9531	− 0,6291	− 0,5652	= − 2,1276
σ_1	0,0732	0,1469	0,2220	0,2995	0,3804	0,4666	0,5614	0,6698	1,2611	+ 4,0760	− 0,6755	− 0,5504	− 0,5160	= − 0,8877
σ_4	0,0730	0,1461	0,2197	0,2940	0,3688	0,4440	0,5190	0,5919	1,0180	− 0,5797	+ 3,8423	− 0,7956	− 0,7266	= − 0,5675
σ_7	0,0715	0,1427	0,2136	0,2839	0,3532	0,4209	0,4863	0,5483	0,9355	− 0,4713	− 0,7956	+ 3,6661	− 1,0752	= − 0,4606
σ_{10}	0,0353	0,0705	0,1055	0,1399	0,1736	0,2063	0,2379	0,2678	0,4564	− 0,2207	− 0,3633	− 0,5376	+ 4,0294	= − 0,2164

1	0,64	0,61	0,56	0,50	0,40	0,22	− 0,20	− 0,61	− 1,40	0,150	0,140	0,130	0,075	
2	0,669	0,635	0,572	0,536	0,447	0,222	+ 0,139	− 0,251	− 1,262	0,097	0,096	0,095	0,054	
3	0,667	0,636	0,583	0,524	0,411	0,261	+ 0,055	− 0,314	− 1,356	0,111	0,116	0,120	0,064	
4	0,676	0,644	0,590	0,536	0,420	0,263	+ 0,081	− 0,292	− 1,332	0,103	0,111	0,117	0,061	
5	0,6808	0,6387	0,5981	0,5309	0,4204	0,2708	+ 0,066	− 0,301	− 1,347	0,105	0,114	0,122	0,063	
6	0,6799	0,6496	0,5962	0,5321	0,4228	0,2733	+ 0,0683	− 0,2982	− 1,3443	0,1041	0,1135	0,1227	0,0630	
7	0,6802	0,6490	0,6004	0,5318	0,4233	0,2757	+ 0,0653	− 0,2996	− 1,3463	0,1042	0,1141	0,1233	0,0633	
8	0,6810	0,6499	0,6022	0,5310	0,4237	0,2772	+ 0,0646	− 0,2998	− 1,3465	0,1041	0,1143	0,1236	0,0634	
9	0,6815	0,6504	0,6032	0,5305	0,4240	0,2776	+ 0,0642	− 0,3000	− 1,3469	0,1042	0,1144	0,1237	0,0634	
10	0,6817	0,6506	0,6037	0,5302	0,4241	0,2778	+ 0,0640	− 0,3000	− 1,3469	0,1042	0,1144	0,1237	0,0634	

Erste Näherung für $h = 2{,}0$.

Summengleichungen.

	$S_{0,2}$	$S_{0,5}$	$S_{0,8}$	$\Sigma_{0,2}$	$\Sigma_{0,7}$	
s_2	1,7469	1,9351	2,4434	− 2,8037	− 3,3482	= − 0,2210
s_5	0,7888	2,4084	2,6262	− 3,0128	− 2,9876	= − 0,7406
s_8	0,5231	1,4173	3,2354	− 3,4586	− 2,1844	= − 1,7063
σ_2	0,8809	2,2533	4,6212	+ 6,6631	− 3,9346	= − 1,4552
σ_7	0,2113	0,5198	0,9621	− 0,5840	+ 2,9542	= − 0,2164

Differenzengleichungen.

	$D_{0,2}$	$D_{0,5}$	$D_{0,8}$	$\Delta_{0,2}$	
d_2	1,4507	1,2121	1,1118	− 2,1081	= + 0,0210
d_5	0,4996	1,7008	1,3176	− 2,3906	= − 0,5094
d_8	0,2459	0,7365	1,9664	− 2,9576	= − 1,4937
δ_2	0,1432	0,3954	0,9459	+ 3,8619	= − 0,4913

Auflösungen.

Summen	Differenzen
$S_{0,2} = + 0{,}611$	$D_{0,2} = + 0{,}502$
$S_{0,5} = + 0{,}397$	$D_{0,5} = + 0{,}281$
$S_{0,8} = - 0{,}687$	$D_{0,8} = - 0{,}870$
$\Sigma_{0,2} = + 0{,}073$	$\Delta_{0,2} = + 0{,}038$
$\Sigma_{0,7} = + 0{,}051$	

Hilfsgleichungen zur Iteration.

	$S_{0,1}$	$S_{0,2}$	$S_{0,3}$		s_1	s_2	s_3		s_1	s_2	s_3
s_1	0,6870	0,5863	0,5889	=	+ 1	0	0	$S_{0,1}$	+ 2,15049	− 1,31902	− 0,46246
s_2	0,2931	0,8040	0,6498	=	0	+ 1	0	$S_{0,2}$	− 0,65929	+ 2,46215	− 1,36894
s_3	0,1963	0,4332	0,8851	=	0	0	+ 1	$S_{0,3}$	− 0,15426	− 0,91253	+ 1,90239

	$S_{0,4}$	$S_{0,5}$	$S_{0,6}$		s_4	s_5	s_6		s_4	s_5	s_6
s_4	0,9506	0,7543	0,7175	=	+ 1	0	0	$S_{0,4}$	+ 2,08145	− 1,24872	− 0,47046
s_5	0,6035	1,0067	0,7982	=	0	+ 1	0	$S_{0,5}$	− 0,99941	+ 2,58449	− 1,27474
s_6	0,4783	0,6652	1,0558	=	0	0	+ 1	$S_{0,6}$	− 0,31327	− 1,06265	+ 1,96342

	$S_{0,7}$	$S_{0,8}$	$S_{0,9}$		s_7	s_8	s_9		s_7	s_8	s_9
s_7	1,0999	0,8739	1,2201	=	+ 1	0	0	$S_{0,7}$	+ 2,05207	− 1,14749	− 0,59526
s_8	0,7647	1,1446	1,3261	=	0	+ 1	0	$S_{0,8}$	− 1,04186	+ 2,59636	− 1,31644
s_9	0,6377	0,8062	1,6498	=	0	0	+ 1	$S_{0,9}$	− 0,28407	− 0,82521	+ 1,47952

	$\Sigma_{0,1}$	$\Sigma_{0,4}$	$\Sigma_{0,7}$	$\Sigma_{1,0}$		σ_1	σ_2	σ_3	σ_4		σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
σ_1	+4,0760	−0 6755	−0,5504	−0,5160	=	+1	0	0	0	$\Sigma_{0,1}$	+0,26540	+0,06570	+0,06330	+0,06272
σ_2	−0,5797	+3,8423	−0,7956	−0,7266	=	0	+1	0	0	$\Sigma_{0,4}$	+0,05635	+0,29559	+0,08480	+0,08315
σ_3	−0,4713	−0.7956	+3,6661	−1,0752	=	0	0	+1	0	$\Sigma_{0,7}$	+0,05422	+0,08478	+0,31489	+0,10626
σ_4	−0,2207	−0,3633	−0,5376	+4,0294	=	0	0	0	+1	$\Sigma_{1,0}$	+0,02685	+0,04156	+0,05313	+0,27329

	$D_{0,1}$	$D_{0,2}$	$D_{0,3}$		d_1	d_2	d_3		d_1	d_2	d_3
d_1	0,6372	0,4869	0,4407	=	+ 1	0	0	$D_{0,1}$	+ 2,15909	− 1,29860	− 0,40547
d_2	0,2435	0,7050	0,5022	=	0	+ 1	0	$D_{0,2}$	− 0,64953	+ 2,48593	− 1,30325
d_3	0,1469	0,3348	0,7383	=	0	0	+ 1	$D_{0,3}$	− 0,13505	− 0,86892	+ 2,02613

	$D_{0,4}$	$D_{0,5}$	$D_{0,6}$		d_4	d_5	d_6		d_4	d_5	d_6
d_4	0,7580	0,5159	0,4347	=	+ 1	0	0	$D_{0,4}$	+ 2,12282	− 1,20759	− 0,38219
d_5	0,4127	0,7703	0,5178	=	0	+ 1	0	$D_{0,5}$	− 0,96647	+ 2,61935	− 1,20262
d_6	0,2897	0,4316	0,7784	=	0	0	+ 1	$D_{0,6}$	− 0,25418	− 1,00292	+ 2,09379

	$D_{0,7}$	$D_{0,8}$	$D_{0,9}$		d_7	d_8	d_9
d_7	0,7839	0,5175	0,6087	=	+ 1	0	0
d_8	0,4527	0,7924	0,7213	=	0	+ 1	0
d_9	0,3303	0,4588	1,0524	=	0	0	+ 1

	d_7	d_8	d_9
$D_{0,7}$	+ 2,11208	− 1,11420	− 0,45795
$D_{0,8}$	− 1,00012	+ 2,61989	− 1,21718
$D_{0,9}$	− 0,22688	− 0,79246	+ 1,62458

	$\Delta_{0,1}$	$\Delta_{0,4}$	$\Delta_{0,7}$		δ_1	δ_4	δ_7
δ_1	+4,2513	−0,3997	−0,1762	=	+ 1	0	0
δ_2	−0,3443	+4,2165	−0,2796	=	0	+ 1	0
δ_3	−0,1515	−0,2796	+4,3927	=	0	0	+ 1

	δ_1	δ_4	δ_7
$\Delta_{0,1}$	+ 0,23750	+ 0,02324	+ 0,01101
$\Delta_{0,4}$	+ 0,02002	+ 0,24013	+ 0,01609
$\Delta_{0,7}$	+ 0,00947	+ 0,01609	+ 0,22905

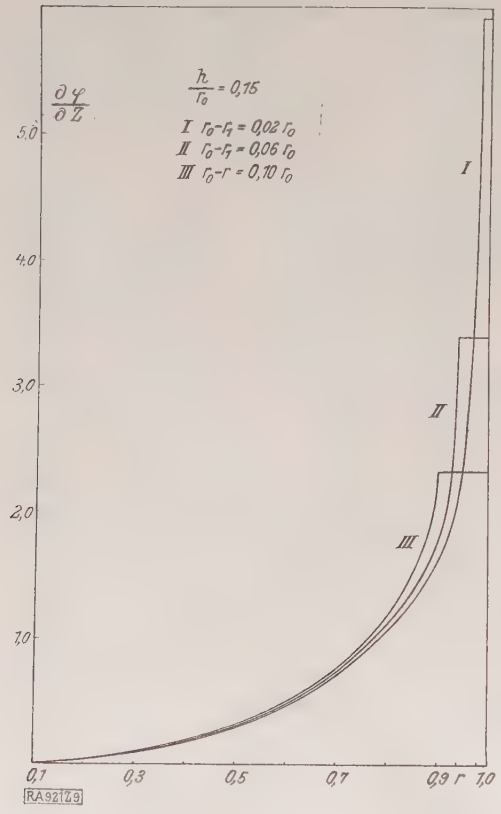

Abb. 9.

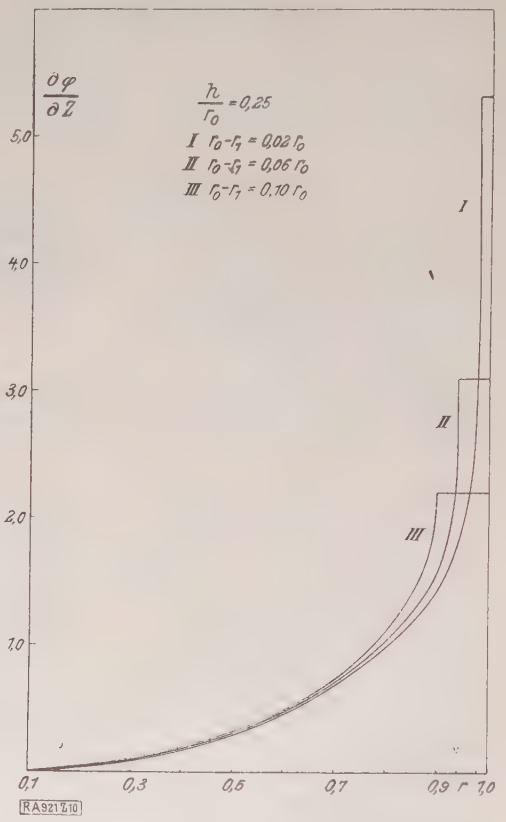

Abb. 10.

zu geben. Man sieht, daß innerhalb der Fehlergrenzen die Werte von $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ für die Seitenverhältnisse 0,15 und 0,25 praktisch übereinstimmen bis etwa $r = 0{,}5$; erst von da ab macht sich ein Einfluß des Seitenverhältnisses bemerkbar. Der Zylinder vom Seitenverhältnis 2 : 1 liefert von Anfang an kleinere Werte, wie es ja auch sein muß. Untersucht man bei gegebenem Seitenverhältnis die Abhängigkeit von der Spaltbreite näher, so zeigt sich folgendes (vergl. die Zahlentafel auf S. 478).

Verkleinert man den Spalt, so nimmt $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ anfangs etwas langsamer zu wie vorher, wächst dafür aber auf dem letzten Stück ganz außerordentlich stark. Verkleinert man die Spaltbreite unbegrenzt, so nimmt $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ am Rande der Scheibe unbegrenzt zu, der Widerstand muß also unendlich werden, was wir ja schon im Abschn. **2** bei der Be-

Werte von $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ auf der Scheibe.

r	h/r_0	Spaltbreite 0,1			r	h/r_0	Spaltbreite 0,06		Spaltbreite 0,02	
		0,15	0,25	2,00			0,15	0,25	0,15	0,25
0,1		0,000	0,000	0,000	0,1		0,000	0,000	0,000	0,000
0,2		0,035	0,035	0,032	0,2		0,034	0,035	0,034	0,034
0,3		0,089	0,092	0,081	0,3		0,088	0,090	0,087	0,087
0,4		0,176	0,179	0,156	0,4		0,174	0,176	0,171	0,172
0,5		0,299	0,305	0,264	0,5		0,296	0,297	0,290	0,290
0,6		0,478	0,477	0,415	0,6		0,469	0,466	0,460	0,452
0,7		0,746	0,726	0,634	0,7		0,726	0,704	0,709	0,680
0,8		1,193	1,125	1,006	0,8		1,138	1,062	1,091	1,004
0,9		2,326	2,198	2,083	0,9		1,696	1,551	1,587	1,414
					0,94		3,398	3,101	2,111	1,774
					0,98				5,927	5,309

sprechung der Hortschen Arbeit sahen. Aus den Werten von $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ habe ich mittels numerischer Integration nach der Formel (9a) den Widerstand der Scheibe in den einzelnen Fällen bestimmt. Setzen wir, wie im vorigen Abschnitt

$$W = 4 \pi \mu \omega r_0^3 \cdot \zeta ,$$

so erhalten wir die folgenden Zahlen für den Faktor ζ:

Seitenverhältnis 0,15, Spaltbreite 0,10 = 1,30
» 0,06 = 2,30
» 0,02 = 4,78
» 0,25, » 0,10 = 1,22
» 0,06 = 2,08
» 0,02 = 4,27
» 2,0, » 0,10 = 1,18.

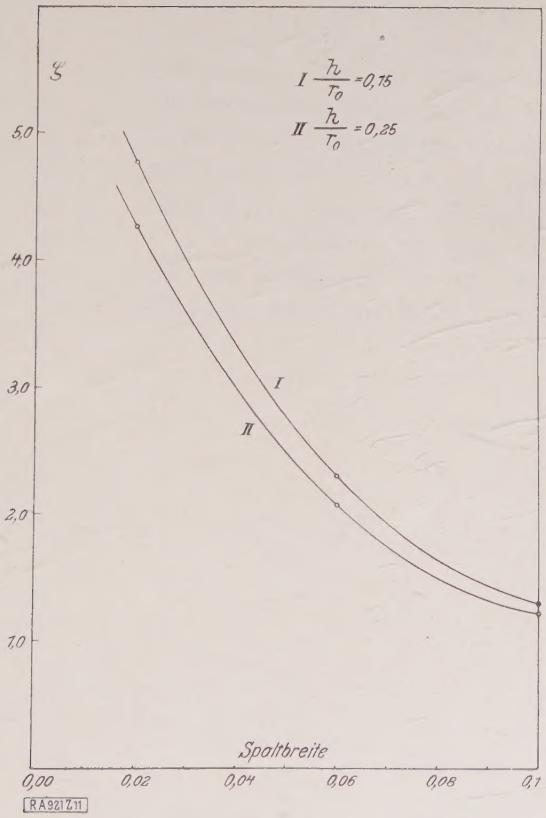

Abb. 11.

Die sich so ergebenden Kurven für den Beiwert ζ sind für die Seitenverhältnisse 0,15 und 0,25 in Abb. 11 aufgetragen. Die Abhängigkeit von der Spaltbreite ist daraus hinreichend ersichtlich. Es bleibt noch übrig, einige Worte über die Abhängigkeit vom Seitenverhältnis zu sagen.

Für das Seitenverhältnis Null, also für einen unendlich kleinen Abstand zwischen der Scheibe und dem Gefäßboden, muß natürlich der Widerstand unendlich werden. Er fällt aber mit wachsendem Seitenverhältnis sehr rasch ab und ist für $h : r_0 = 0{,}25$ schon nahezu konstant geworden; bis $h : r_0 = 2{,}0$ ändert sich der Widerstand nur noch um 4 vH. Der Zylinder mit dem Seitenverhältnis 2 : 1 ist aber praktisch gleichbedeutend mit dem unendlich hohen Zylinder. Denken wir uns nämlich den Gefäßboden frei um die z-Achse drehbar, so müssen wir auf diese Wand ein äußeres Moment wirken lassen, um zu verhindern, daß der Boden von der Flüssigkeit mitgenommen wird. Dieses Moment muß also dem Moment der Reibungskräfte, die zwischen Wand und

Flüssigkeit auftreten, das Gleichgewicht halten. Letzteres Moment können wir, genau wie es oben geschah, aus den Werten von $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ auf der unteren Begrenzung berechnen. Dabei zeigt sich, daß für $h : r_0 = 0{,}25$ der Beiwert dieses Moments noch rund 0,40, im Falle $h : r_0 = 2{,}0$ dagegen nur noch 0,04 beträgt. Das heißt aber, daß die Flüssigkeit in der Nähe des Bodens sich praktisch nicht mehr bewegt, wir also diese Scheidewand fortlassen können, ohne die Bewegung wesentlich zu stören. Damit kommen wir aber auf den Grenzfall des Zylinders mit dem Seitenverhältnis $\infty : 1$, womit auch die Abhängigkeit des Widerstandes vom Seitenverhältnis geklärt ist. 921

Lebenslauf

Am 23. Juni 1905 wurde ich, Curt Otto Walter Schmieden, als Sohn des Oberstleutnants a. D. Walter Schmieden, damals Hauptmann im Colbergschen Grenadier-Regiment Nr. 9, und seiner Ehefrau Elisabeth geb. Havenstein, zu Stargard i. P. geboren. Nach Besuch der Vorschule trat ich Ostern 1914 in das dortige Gymnasium ein, wo ich Ostern 1923 die Reifeprüfung bestand. Von Ostern 1923 bis Herbst 1925 besuchte ich die Universität Rostock, wo ich Vorlesungen bei den Professoren Pohlhausen, Staude, Füchtbauer, Schottky, Walden und Störmer hörte; im Wintersemester 1925/26 besuchte ich die Universität Berlin, wo ich Vorlesungen bei den Professoren Laue, Pringsheim, Dessoir, Byk und Becker hörte. Seit Ostern 1926 bin ich als Assistent an der Technischen Hochschule Danzig am Lehrstuhl für Mathematik angestellt.

Für die Anregung zu dieser Arbeit und freundlichen Rat bei der Ausführung bin ich Herrn Professor v. Mises in Berlin zu dauerndem Dank verpflichtet.

VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin NW 7. — Druck von A. W. Schade, Berlin N 65.